ECON 2200, Maksimering - handout

Kjell Arne Brekke

May 8, 2012

1 Innledning

Dette notatet er noen begreper og noen oppgaver som kan hjelpe deg til å forberede deg til forelesningen. Om du **prøver** å regne deg gjennom disse oppgavene vil det være mye lettere å følge med på det som blir gjennomgått på forelesningen. Alle oppgavene kan besvares på fronter.uio.no. Logg inn med ditt brukernavn og passord fra uio. Om du svarer på alle spørsmålene i froner tjener du 3 poeng til obligatorisk oppgave, uavhengig av om du svarer rett eller galt.

Om du finner oppgavene vanskelig, så ikke bli motløs. Vi skal gå gjennom dette på forelesningen.

2 Maksimering;

Definisjon

Om f er definert i et område D sier vi c er et maksimumspunkt i D dersom $f(c) \geq f(x)$ for alle x i D, tilsvarende er c et minimumspunkt om $f(c) \leq f(x)$ for alle x i D.

Eksempel, Funksjonen

$$f(x) = x^2$$

har den egenskapen at

$$f(x) = x^2 \geq 0 \text{ for alle } x \text{ (området } D \text{ kan nå være hele tallinja)}$$

samtidig vet vi at $0^2 = 0$, så om vi velger $c = 0$ så er $f(c) = 0$.

Førsteordensbetingelser

Som påpekt på forelesningen er funksjonene flate på toppen, dette vil karakterisere maksimum og minimumspunkt. Formelt sier vi det på denne måten:

Anta f er deriverbar på I, og at $c \in I$ er i det indre av intervallet. En **nødvendig** betingelse for at c skal være et maksimum eller minimumspunkt er da at

$$f'(c) = 0.$$

Ligningen kaller vi førsteordensbetingelsen, og punktene som tilfredsstille dem kaller vi stasjonærpunkter.

Eksempel,

En produsent selger produktet til en pris 100 kroner per kilo og kostnadene er x^2, der x er bedriftens kvantum, hvor mye den produserer. Den totale profitten er da

$$\pi(x) = 100x - x^2 \text{ for } x \geq 0$$

Læreboka bruker c som stasjonærpunktet, men i økonomi er det vanligere å sette en stjerne på variabelen. Så om $\pi(x)$ er profitten om bedriften produserer et vilkårlig antall x, så lar vi x^**være* det spesifikke antallet som maksimerer profitten.

Oppgave 1 *Sett opp førsteordensbetingelsen for profittmaksimering og finn stasjonærpunktet. Du skal skrive opp ligningen for*

$$\pi'(x^*) = 0$$

for den gitte profittfunksjonen og finne den verdien av x^* *som løser ligningen.*

Velg mellom følgende svaralternativ

1. *Førsteordensbetingelsen er* $100x^* - 2x^* = 0$ *og løsningen er* $x^* = 0$
2. *Førsteordensbetingelsen er* $100 - 2x^* = 0$ *og løsningen er* $x^* = 50$
3. *Førsteordensbetingelsen er* $100 - 2x^* = 0$ *og løsningen er* $x^* = 200$
4. *Førsteordensbetingelsen er* $100x^* - 2x^* = 0$ *og løsningen er* $x^* = 200$.

Andreordensbetingelser

Vi husker fra sist at en konveks funksjon (smilemunnen, der $f''(x) > 0$) er flat på bunnen mens en konkav funksjon (surmunnen der $f''(x) < 0$) er flat på toppen. Hva er tilfellet for profittfunksjonen ovenfor?

Oppgave 2 *Profittfunksjonen* $\pi(x) = 100x - x^2$ *for* $x \geq 0$ *er*

1. Konkav
2. Konveks.

Hva er en løsning?

Ovenfor løste vi profittmaksimeringen når prisen var 100. Hva om prisen er 97 eller 312? Eller om kostnadene er $2x^2$ eller kanskje x^3? Vi ønsker å slippe å gjøre regnestykket på nytt hver gang, så vi sier nå at prisen er p, og at kostnadene er en funksjon $c(x)$. Profitten blir

$$\pi(x) = px - c(x)$$

som gir førsteordensbetingelse

$$\pi'(x^*) = p - c'(x^*) = 0$$

Vi kan skrive førsteordensbetingelsen på følgende form.

$$p = c'(x^*)$$

Hva gjør vi så?

Vi gjør ikke noe mer, vi er i mål, vi har funnet løsningen! Ligningen $p = c'(x^*)$ er imidlertid noe vi kan tolke som økonomer. Om dette er en god beskrivelse av det som faktisk foregår i økonomien så betyr det at når du går i butikken og kjøper en vare så betaler du akkurat det det kostet å lage den (pluss andre kostnader til transport, butikkens kostnader etc...). Dette er en mye mer spennende påstand enn at det er optimalt for Hønserud gård å produsere 3484 egg om dagen (det finnes priser og kostnadsfunksjoner som ville gi akkurat det svaret).

Men det er viktig å kunne tolke denne løsningen rett. Vi startet med bedriftens profittmaksimering og endte opp med ligningen $p = c'(x^*)$. Spørsmålet blir nå:

Oppgave 3 *Hvilke av følgende påstander oppsummerer det vi har funnet?*

1. *Bedriften setter prisen på produktet lik kostnaden*
2. *Bedriften velger kvantum slik at kostnaden på sist produserte enhet er lik prisen*
3. *Bedriften velger kvantum slik at gjennomsnittlige produksjonskostnader er lik prisen*
4. *Dersom produksjonskostnadene avviker fra prisen vil bedriften velge en annen teknologi.*

2.1 Deriverbar og Kontinuitet

Ovenfor brukte jeg ordet "deriverbar". Hva er det?

Vi husker at vi fant den deriverte av en funskjon i punktet x_0 ved å se på stigningstallet til sekanten gjennom $(x_0, f(x_0))$ og $(x_1, f(x_1))$ når vi velger x_1 stadig nærmere x_0. Det kan imidlertid tenkes at svaret blir forskjellig avhengig av hvilken side x_1 ligger på. Altså om vi velger $x_1 < x_0$ men stadig nærmere kan det tenkes at vi får et annet svar enn om vi velger $x_1 > x_0$ men stadig nærmere. Om vi får ulikt svar avhengig av hvilken side vi nærmer oss, sier vi funksjonen ikke er **deriverbar** i x_0.

La oss ta funksjonen

$$f(x) = |x|$$

Jeg minner om at $|x|$ er absoluttverdien. Om x er et positivt tall er absoluttveriden tallet selv, altså $f(x) = x$ når $x \geq 0$. Om x er negativt får vi absoluttverdien ved å ta bort minustegnet, f.eks. er $|-3| = 3$ som vi også kan skrive som at $|-3| = 3 = -(-3)$. Det betyr at $f(x) = -x$ når $x \leq 0$. Dette samenfatter vi slik:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

Oppgave 4 *Tegn $f(x)$ i et diagram. Hvilke av følgende påstander tror du er riktig? (Merk: jeg spør om hva du tror, så strengt tatt er det ikke noe svar galt. Men utfra definisjon av deriverbar er bare ett av svarene riktige, og det er fasiten i Fronter-oppgaven.)*

1. Funksjonen $f(x)$ er ikke deriverbar i noe punkt.
2. Funksjonen $f(x)$ er ikke deriverbar i $x_0 = 0$, forøvrig er $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases}$

3. Den deriverte er $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ -1 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$